DOWODY
KILKU PODAŃ GIEOMETRYCZNYCH (*)

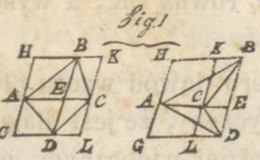
PRZEZ

A. Frączkiewicza.

I.

O dochodzeniu powiérzchni czworokąta z jego przekątnych i z kąta między niemi zawartego.

TWIERDZENIE I. *Każdy czworokąt ABCD* (fig. 1) *jest połową równoległoboku, zrobionego z przekątnych AC, BD i z kąta między niemi zawartego.*



DOWODZ. Przez wiérzchołki *A*, *C*, poprowadźmy linie równoległe do *BD*, a przez wiérzchołki *B*, *D*, poprowadźmy linie równoległe do *AC*, i przedłużmy

(*) Nie mamy peryodycznego pisma, któreby ciągłą koleją donosiło o postępie umiejętności; cóż dopiero pisma, któreby nadawało umiejętnościom postęp.! Niemała bezwątpienia jest sztuka pocieszyć lub rozrzewnić, podobać się i zająć choćby też i ostrożnie pożyczonym dowcipem; zawładnąć duszą czytelnika, przekonać go o czem nie był przekonany, zręcznie nauczyć czego nie znał, lub pracowicie zebrać i przedstawić mu co tylko dotąd ludzie odkryli, a przez to wszystko zjednać sobie zasługę w granicach szczupłéj literatury własnéj. Lecz inne jest stanowisko zasługi tych zwolenników umiejętności wybranéj,

te równoległe aż do przecięcia się z pierwszemi w punktach G, H, K, L. Ponieważ trójkąty ACB, ACD, są połowami równoległoboków AK, AL; summa przeto trójkątów ACB, ACD, jest połową summy równoległoboków AK, AL, czyli czworokąt $ABCD$ jest połową równoległoboku GK, zrobionego z przekątnych AC, BD i z kąta między niemi zawartego. Co b. d. d.

Wniosek. Oznaczając przez (AC,BD) kąt, pod którym przekątne AC, BD są do siebie nakłonione, i biorąc promień za jedność, będzie

$$ABCD = \tfrac{1}{2} AC.BD. \text{ wst } (AC,BD), \qquad (1)$$

tojest: *powiérzchnia czworokąta równa się połowie iloczynu z przekątnych, pomnożonego przez wstawę kąta między niemi zawartego.* Okazało się bowiem, że czworokąt $ABCD$ jest połową równoległoboku GK; ten zaś równoległobok ma podstawę GL równą AC, a wysokość równą BD. wst (AC, BD).

Uwaga 1. Wyłożony dopiéro dowód wzoru (1), lubo nie nowy, podało się z przyczyny, że jest dla początkujących łatwiejszym i bardziéj widocznym, niż dowodzenie najczęściéj używane; a które zależy na tém, ażeby wyrażenie powiérzchni trójkąta przez dwa jego boki i przez wstawę kąta między niemi zawartego, przystósować do każdego z cztérech trójkątów, mających punkt przecięcia się przekątnych za spólny wiérzchołek, a boki czworokąta za podstawy. W ta-

kapłanów dozgonnym ślubem do ołtarza jéj przywiązanych, którzy nietylko jéj dogmata uznali; jeszcze nad rozszerzeniem jéj czci niezmordowanie pracują. Ilekroć tym śmiałym dążeniom przez pismo nasze usłużyć wypadnie, poczytamy to za udział w obowiązku ważnym, którego wypełnienie przyniesie nam radość że dopomogło sprawie nauki i miejscowéj korzyści. P. R.

kiém albowiem dowodzeniu, potrzeba summę cztérech wyrażów rozkładać na czynniki, (co początkującym zwykle z trudnością przychodzi), i potrzeba nadto przechodzić przez dwa przypadki, rozróżniając czworokąt wypukły, od czworokąta mającego kąt jeden wskakujący. Jeżeli zresztą nie zechcemy przechodzić przez twierdzenie 1, należy wzoru (1) dowodzić następującym, także wiadomym sposobem. Niech *E* będzie punkt, w którym się przekątne *AC*, *BD* z sobą przecinają. Biorąc *AC* za spólną podstawę trójkątów *ACB*, *ACD*, wysokości ich będą odpowiednio równe iloczynom *BE*. wst *(AC, BD)*, *ED*. wst *(AC,BD)*; a następnie powiérzchnie tych dwóch trójkątów będą: $ACB=\frac{1}{2}AC.BE.$ wst (AC, BD), $ACD=\frac{1}{2}AC.ED.$ wst (AC, BD). Dodając niniejsze dwie równości do siebie, i uważając, że $BE+ED=BD$, przychodzimy do wzoru (1).

Uwaga 2. Twierdzenie 1 i wniosek ściągają się właściwie do takiego tylko czworokąta prostokréślnego i na jednéj płaszczyźnie, jakim się w początkach gieometryi zwykle ograniczamy, tojest: do czworokąta, którego boki nie krzyżują się z sobą. Jeżeli zaś weźmiemy czworokąt *ABCDA* (fig. 2), boki krzyżujące się

fig. 2



mający, czyli tak zwany dwoisto-wklęsły, i będziemy w nim uważali *AC*, *BD* za jego przekątne; natenczas w twierdzeniu poprzedzającém i we wniosku, trzeba w miejscu powiérzchni czworokąta *ABCDA*, położyć różnicę trójkątów, tenże czworokąt składających, tojest: różnicę trójkątów, mających te dwa jego boki przeciwne *AD*, *BC*, co się z sobą nie krzyżują, za pod-

stawy, a punkt skrzyżowania się dwóch drugich boków *AB*, *CD*, za spólny wiérzchołek. W teraźniejszym bowiem przypadku, nie summa trójkątów *ACD*, *ACB*, ale ich różnica jest połową równoległoboku *GK*.

II.

O punkcie, z którego prowadzone linie proste do środków boków czworokąta, dzielą tenże czworokąt na cztéry części równoważne.

Twierdz. 2. *Jeżeli w czworokącie, bądź wypukłym bądź mającym kąt jeden wskakujący, przez środek każdéj przekątnéj poprowadzimy równoległą do drugiéj, a punkt spólnego przecięcia się tak poprowadzonych dwóch równoległych złączymy ze środkami boków przez linie proste; te cztéry linie proste podzielą czworokąt na cztéry części równoważne, byleby punkt przecięcia się rzeczonych dwóch równoległych nie przypadał za czworokątem mającym kąt jeden wskakujący.*

fig. 3 a.

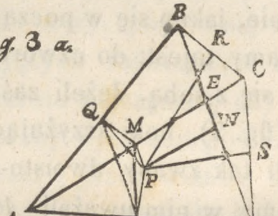
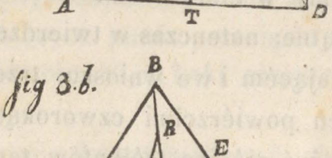


fig 3 b.



Dowodz. Niech będzie czworokąt *ABCD* wypukły lub pojedynczo wklęsły (fig. 3 *a* i 3 *b*), którego przekątne *AC*, *BD*, przecinające się w *E*, podzielmy każdą na dwie równe części w punktach *M*, *N*; przez punkt *M* poprowadźmy równoległą do *BD*, a przez punkt *N* poprowadźmy równoległą do

AC, i niech te dwie równoległe przecinają się w punkcie P. Jeżeli czworokąt $ABCD$ jest wypukłym (fig. 3 a); punkt P przypada zawsze wewnątrz tegoż czworokąta: gdy bowiem odcinki większe AE, DE, przekątnych, podzielimy myślą na połowy w punktach X, Y, a na liniach EX, EY dokończymy równoległoboku, czwarty wierzchołek Z tego równoległoboku padnie na środek boku AD; a ponieważ $EM=\frac{1}{2}EA-\frac{1}{2}EC<EX$, i podobnież $EN=\frac{1}{2}ED-\frac{1}{2}EB<EY$; oczywiście punkt P leży w równoległoboku $EXZY$, a tém samém leży on wewnątrz czworokąta $ABCD$. Inaczéj ma się rzecz w czworokącie $ABCD$ (fig. 3 b) mającym kąt jeden wskakujący. Jakoż, niech G, H, będą punkta, w których się prosta NP przecina z bokami AD, BC. Ponieważ $NP=EM=\frac{1}{2}(EA+EC)$, a z podobieństwa trójkątów GDN i ADE, BHN i BCE, wypada

$$NG=\frac{EA.ND}{ED}=\frac{EA(EB+ED)}{2ED},$$

$$NH=\frac{EC.NB}{EB}=\frac{EC(EB+ED)}{2EB};$$

jest przeto $$NG-NP=\frac{EA.EB-EC.ED}{2ED},$$

$$NP-NH=\frac{EA.EB-EC.ED}{2EB}.$$

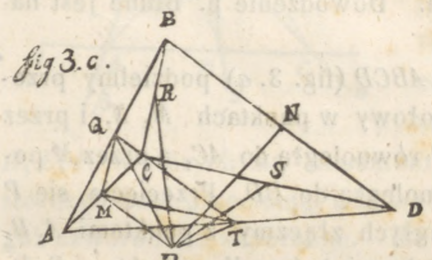
Zatrzymując np. punkta A, B, D, E w położeniu stałém, a zmieniając tylko położenie punktu C na linii AE, widzimy, że licznik $EA.EB-EC.ED$ można według upodobania uczynić dodatnym, równym zero lub odjemnym. Jeżeli wspomniony licznik jest zero, punkta P i H padają na G; w przeciwym zaś razie, punkt P leży zawsze między G i H, wewnątrz czworokąta $ABCD$.

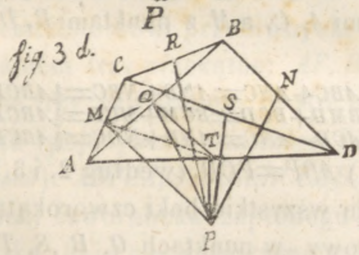
gdy ów licznik jest dodatnym, a zewnątrz, gdy tenże licznik jest odjemnym. Jeżeli zatém punkt P nie przypada za czworokątem $ABCD$; natenczas żadna część linii prostéj, łączącéj punkt P ze środkiem któregokolwiek boku czworokąta, i na tych dwóch punktach zakończonéj, nie przypada téż zewnątrz rzeczonego czworokąta $ABCD$. Podzielmy teraz w rzeczy saméj każdy bok czworokąta $ABCD$ (fig. 3. *a* i 3. *b*) na dwie równe części w punktach Q, R, S, T, i złączmy te punkta przez linie proste z punktem P, przyjmując, że tenże punkt P nie leży za czworokątem $ABCD$ mającym kąt jeden wskakujący. Aby dowieść, że $AQPT$ jest $\frac{1}{4}$ czworokąta $ABCD$, poprowadźmy proste MQ, QT, TM. Ponieważ punkta Q, T, M są środkami linij AB, AD, AC, oczywiście trójkąty AQT, QMT są podobne trójkątom ABD, BCD, i jest $AQT=\frac{1}{4}ABD$, $QMT=\frac{1}{4}BCD$; trójkąty zaś QMT, QPT są równoważne, bo linia QT, jako równoległa do BD, jest także równoległą do MP. Summa przeto lub różnica trójkątów AQT, QPT, jest $\frac{1}{4}$ summy lub różnicy trójkątów ABD, BCD, czyli $AQPT$ $=\frac{1}{4}ABCD$. Dla téj saméj przyczyny, każda z pomiędzy powiérzchni $BQPR$, $CRPS$, $DSPT$, jest jakże$=\frac{1}{4}ABCD$.

Uwagi. Jeżeli czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, punkt P pada na E; w czworokącie zaś $ABCD$ mającym kąt jeden wskakujący, jeżeli punkt P przypada na obwodzie tegoż czworokąta, części z podziału wynikające stają się trójkątami.

Sam tylko punkt P ma tę własność, że linie proste łączące go ze środkami boków czworokąta $ABCD$, dzielą tenże czworokąt na cztéry części równoważne: żeby albowiem trójkąt QTM zamienić na inny QTP' równoważny, i któregoby wierzchołek P' znajdował

się z punktem M po jednéj stronie spólnéj podstawy QT, trzeba koniecznie wziąć punkt P' na kierunku prostéj MP; podobnież, aby trójkąt QRN zamienić na inny QRP'' równoważny, i któregoby wierzchołek P'' znajdował się z punktem N po jednéj stronie spólnéj podstawy QR, trzeba koniecznie wziąć punkt P'' na kierunku prostéj NP; aże nadto oba punkta P' i P'' mają być jednym i tymże samym punktem, muszą więc one leżeć na przecięciu się prostych MP, NP, czyli muszą być punktem P. Wreszcie co do czworokąta wypukłego $ABCD$ (fig. 3. *a*), widoczna jest, że gdybyśmy wzięli inny jaki punkt P', położony np. w czworokącie $AQPT$, toby czworokąt $AQP'T$ był mniejszy od $AQPT$, a zatém mniejszy od $\frac{1}{4}ABCD$.





Twierdzenie 2 możnaby ogólniéj tak podać: W każdym czworokącie danym, bądź wypukłym, bądź pojedynczo lub dwoisto-wklęsłym, jeżeli przez środek każdéj przekątnéj poprowadzimy równoległą do drugiéj; czworokąt, któryby za dwa wierzchołki przeciwne sobie, miał środki dwóch którychkolwiek boków przyległych czworokąta danego, a za drugie dwa wierzchołki przeciwne, miał przecięcie się tychże

dwóch boków i przecięcie się owych dwóch równoległych, będzie równoważny $\frac{1}{4}$ czworokąta danego; bylebyśmy przez powierzchnią każdego czworokąta dwoisto-wklęsłego rozumieli różnicę trójkątów, mających te dwa jego boki przeciwne, co się z sobą nie krzyżują, za podstawy, a punkt skrzyżowania się dwóch drugich boków przeciwnych za spólny wierzchołek. Dowodzenie to samo jak powyżéj, z przybraniem tylko figur 3. *c* i 3. *d*.

Powyższe twierdzenie 2 podał Brune w *Journal für Mathematik*, T. XXII. str. 379. r. 1841, bez dołączenia jednak tego warunku, że punkt P nie ma się znajdować za czworokątem, mającym kąt jeden wskakujący: co zapewne ztąd poszło, że autor mniemał, iż wspomniony punkt sam przez się zawsze wewnątrz czworokąta przypada. Dowodzenie p. Brune jest następujące:

W czworokącie $ABCD$ (fig. 3. *a*) podzielmy przekątne AC, BD, na połowy w punktach M, N, i przez N poprowadźmy NP równoległą do AC, a przez M poprowadźmy MP równoległą do BD. Przecięcie się P tych dwóch równoległych złączmy z punktami A, B, C, D, tudzież N z punktami A, C, a M z punktami B, D. Ponieważ

1. $ABP+PBC=ABC+APC=ABC+ANC=ANB+NBC=\frac{1}{2}ABCD$
2. $PBC+PCD=BPD+BCD=BMD+BCD=BCM+MCD=\frac{1}{2}ABCD$
3. $ADP+PCD=ACD-APC=ACD-ANC=AND+NDC=\frac{1}{2}ABCD$

jest przeto (według 1. i 2.) $ABP=PCD$, (według 2. i 3.) $PBC=ADP$. Jeżeli zatém wszystkie boki czworokąta $ABCD$ podzielimy na połowy w punktach Q, R, S, T, i złączymy te punkta z P, będzie

$$AQP=QBP=CSP=SDP,$$
$$ATP=BRP=RCP=TDP;$$

a ztąd $AQP+ATP=QBP+BRP=CSP+RCP=SDP+TDP$,

to jest: $AQPT=QBRP=RCSP=SDTP=\frac{1}{4}ABCD$. Co b. d. d.

Gdyby kąt jeden czworokąta, np. kąt przy *C* był wskakującym, łatwo widzieć, że w poprzedzającém dowodzeniu, trzebaby tylko znak + przed trójkątami *BCD*, *NBC*, *NDC*, zamienić na przeciwny (—).

III.

O położeniu środków trzech przekątnych czworoboku zupełnego na jednéj linii prostéj.

Opisanie. Przez *czworobok zupełny* (vollständiges Vierseit) rozumiemy każde cztéry linie proste α, β, γ, δ (fig. 4) na jednéj płaszczyźnie, razem czyli jako jedna całość uważane; a te sześć punktów *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, w których się wspomnione cztéry linie proste czyli boki przecinają, nazywamy *wierzchołkami* tegoż czworoboku zupełnego. Ma on zatém trzy pary wierzchołków przeciwnych: *A* i *F*, *B* i *E*, *C* i *D*, a tém samém trzy przekątne: *AF*, *BE*, *CD*, i obejmuje w sobie trzy czworoboki proste czyli trzy czworokąty proste (pojedyncze, *einfaches Vierseit* lub *einfaches Viereck*): *ABFEA*, *ACFDA*, *BCEDB*. Przekątne równie jak boki czworoboku zupełnego, uważają się właściwie jako linie nieograniczone; w następnym jednak ciągu, gdy mówimy o końcach i środku przekątnéj, potrzeba się dorozumiewać, że uważamy téż przekątną jako na wierzchołkach czworoboku zakończoną.

fig. 4.



2

Twierdzenie 3. *W czworoboku zupełnym* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (fig. 4 lub 5), *środki G, H, I trzech jego przekątnych AF, BE, CD, znajdują się zawsze na jednéj linii prostéj.*

Dowodz. analit. (fig. 4). Weźmy dwa którekolwiek boki α, β za osi x, y; i niech odcięte punktów B, C, będą b, c, rzędne zaś punktów D, E, niech będą d, e. Przez środek G téj przekątnéj, która przez początek A spółrzędnych przechodzi, wystawmy sobie poprowadzone równoległe do dwóch drugich boków γ i δ: ponieważ piérwsza równoległa przecina na dwie równe części każdą z dwóch odległości AB i AD, druga zaś przecina na dwie równe części każdą z dwóch odległości AC i AE; równaniami przeto tych dwóch równoległych będą, jak wiadomo:

$$\frac{x}{\frac{1}{2}b}+\frac{y}{\frac{1}{2}d}=1, \qquad \frac{x}{\frac{1}{2}c}+\frac{y}{\frac{1}{2}e}=1,$$

czyli:

$$\left.\begin{aligned} 2dx+2by&=bd. \\ 2ex+2cy&=ce. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

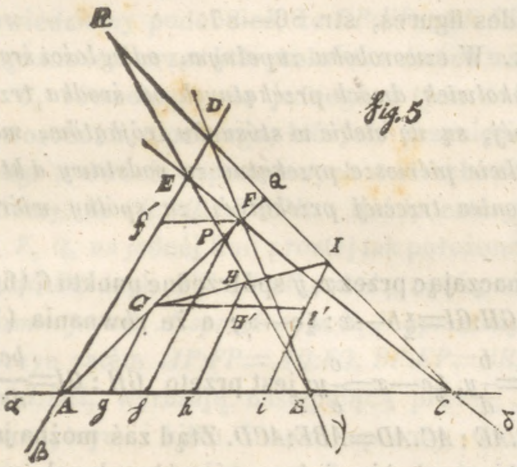
Odejmując niniejsze dwa równania od siebie, otrzymujemy

$$2(d-e)x+2(b-c)y=bd-ce, \quad (2)$$

równanie pewnéj linii prostéj. Ta linia prosta przechodzi naprzód przez punkt G: spółrzędne bowiem punktu G, jako czyniące zadość obu równaniom (1), muszą też koniecznie sprawdzić i różnicę (2) tychże dwóch równań. Przechodzi ona nadto przez oba punkta H i I: bo widzimy, że równaniu (2) staje się zadość, tak przez wartości $x=\frac{1}{2}b$, $y=\frac{1}{2}e$, które są spółrzędnemi punktu H, jako też przez wartości $x=\frac{1}{2}c$, $y=\frac{1}{2}d$, które są spółrzędnemi punktu I. Są więc punkta G, H, I, na jednéj linii prostéj, któréj równaniem jest (2).

Niniejszy dowód twierdzenia 3, które jest twierdzeniem Newtona (Principia Lib. I, Prop. XXVII), podałem tu dlatego, że od znanych mi takich dowodów analitycznych, w których się zwyczajnych tylko spółrzędnych używa, zdaje się być krótszy.

DOWODZENIE SYNTETYCZNE (fig. 5).



Przez punkta F, G, H, I poprowadźmy linie równoległe do AD, przecinające się z AC w punktach f, g, h, i, a przez punkta F, G poprowadźmy nadto linie równoległe do AC, z których piérwsza niech się z AD przecina w punkcie f', a druga niech się z prostemi Hh, Ii przecina w punktach H', I'. Trójkąty podobne BFf i FDf', EFf' i FCf, dają:

$$Bf:Ff'=Ff:Df',$$

$$Ff':Cf=Ef':Ff;$$

a ztąd $Bf:Cf=Ef':Df'$.

Ponieważ zaś $GH'=Ah-Ag=\frac{1}{2}AB-Af\frac{1}{2}=\frac{1}{2}Bf$,

$$GI'=Ai-Ag=\tfrac{1}{2}AC-\tfrac{1}{2}Af=\tfrac{1}{2}Cf,$$

$$HH'=Hh-Gg=\tfrac{1}{2}AE-\tfrac{1}{2}Ff=\tfrac{1}{2}Ef',$$

$$II'=Ii-Gg=\tfrac{1}{2}AD-\tfrac{1}{2}Ff=\tfrac{1}{2}Df;$$

zaczém jest także $GH':GI'=HH':II'$. Trójkąty przeto

$GH'H$, $GI'I$, dla równości kątów przy H', I', tudzież dla proporcyonalności boków te kąty obejmujących, są podobne, a w szczególności kąt $HGH'=IGI'$: a że punkta G, H', I', są na jednéj linii prostéj; zatém punkta G, H, I są także na jednéj linii prostéj. Co b. d. d.

Inne dowodzenie syntetyczne tego samego twierdzenia podaje Poncelet w dziele: Traité des propriétés projectives des figures, str. 86—87.

WNIOSEK. *W czworoboku zupełnym, odległości środków którychkolwiek dwóch przekątnych od środka trzeciéj przekątnéj, są do siebie w stósunku trójkątów, mających owe dwie piérwsze przekątne za podstawy a którykolwiek koniec trzeciéj przekątnéj za spólny wiérzchołek.*

Jakoż, oznaczając przez x, y spółrzędne punktu G (fig. 4), mamy $GH:GI=\frac{1}{2}b-x:\frac{1}{2}c-x$; a że równania (1) dają $\frac{1}{2}b-x=\frac{b}{d}y$, $\frac{1}{2}c-x=\frac{c}{e}y$; jest przeto $GH:GI=\frac{bc}{de}$ $=be:cd=AB.AE:AC.AD=ABE:ACD$. Ztąd zaś można już wnieść, że biorąc boki γ i δ za osi spółrzędnych, wypadnie podobnież $GH:GI=FBE:FCD$.

Aby to samo udowodnić syntetycznym sposobem, można (fig. 5) albo wziąć pod uwagę trójkąty podobne DAB i Ggh, EAC i Ggi, albo też uważać, że ponieważ

$$AB:AD=Bf:Ff, \qquad FB:FD=Bf:Af,$$
$$AE:AC=Ff:Cf, \qquad FE:FC=Af:Cf;$$

jest przeto $AB.AE:AC.AD=FB.FE:FC.FD=Bf:Cf=GH':GI'$ $=GH:GI$, a tém samém $ABE:ACD=FBE:FCD=GH:GI$.

UWAGA. Niech P, Q, R (fig. 5) będą punkta, w których się przekątne czworoboku zupełnego α, β, γ, δ, z sobą przecinają. Widzieliśmy dopiero, że bez względu na twierdzenie 3 i jego wniosek, samo tylko popro-

wadzenie linii *Ff* daje proporcyą *ABE*:*FBE*=*ACD*:*FCD*; a ponieważ *ABE*:*FBE*=*AP*:*FP*, *ACD*:*FCD*=*AQ*:*FQ*; jest przeto *AP*:*FP*=*AQ*:*FQ*. Prowadząc przez którykolwiek z dwóch wiérzchołków *E*, *B*, równoległą do jednego z boków czworoboku zupełnego przecinających się w drugim z dwóch wspomnionych wierzchołków, i na drugim z tychże dwóch boków zakończoną, dowiedziemy podobnież, że *BP*:*EP*=*BR*:*ER*; a prowadząc znowuż przez którykolwiek z dwóch wiérzchołków *D*, *C*, równoległą do jednego z tych dwóch boków czworoboku zupełnego, których przecięciem się jest drugi z dwóch wspomnionych wiérzchołków, dowiedziemy, że *CQ*:*DQ*=*CR*:*DR*. Każde cztéry punkta *A*, *P*, *F*, *Q*, na jednéj linii prostéj tak położone, że *AP*:*FP* =*AQ*:*FQ* czyli *PF*:*QF*=*PA*:*QA*, zowią się *punktami harmonijnemi*, *A sprzężony* z *F*, *P sprzężony* z *Q*. Proporcye zatém *AP*:*FP*=*AQ*:*FQ*, *BP*:*EP*=*BR*:*ER*, *CQ*:*DQ* =*CR*:*DR*, wyrażają następującą prawdę, znaną już starożytnym i kilku innemi sposoby udowodnić się dającą: *w czworoboku zupełnym, punkta przecięcia się trzech jego przekątnych są po dwa, do odpowiednich par wiérzchołków przeciwnych, punktami harmonijnemi, sprzężonemi z sobą.*

Jeżeli sobie figury 4téj wystawimy zrobiony obraz perspektywiczny na płaszczyźnie do przedmiotu pochyłéj, i zważymy, że wiérzchołki przeciwne czworoboku zupełnego, środek odległości tych dwóch punktów od siebie, i punkt nieskończenie odległy przekątnéj, wspomnione dwa wiérzchołki łączącéj, stają się na obrazie cztérema punktami harmonijnemi; wypadnie z twierdzenia 3go następujące ogólniejsze:

TWIERDZENIE 4. *Gdy na płaszczyźnie czworoboku zu-*

pełnego poprowadzimy od upodobania linią prostą, a do jéj przecięć z przekątnemi, i do odpowiadających par wiérzchołków przeciwnych czworoboku zupełnego, znajdziemy czwarte punkta harmonijne, z owemi przecięciami sprzężone; te trzy nowe punkta będą także na jednéj linii prostéj.

Jak się niniejsze twierdzenie może wprost udowodnić, i jaka ztąd prawda przez zasadę podwójności (principe de dualité) wypływa, okażemy to na innném miejscu.

IV.

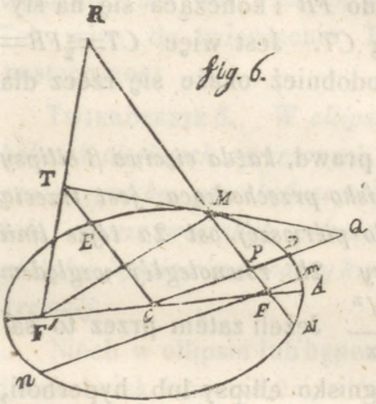
O cięciwach sprzężonych w ognisku ellipsy lub hyperboli.

W drugiém wydaniu swojego dzieła: Manuel de géométrie (Paris, à la librairie de Roret, 1835) na str. 413 podaje Terquem bez dowodu następujące twierdzenie, które ma za nowe.

Twierdzenie. 5. *W ellipsie summa, a w hyperboli różnica cięciw sprzężonych, przez jednoż ognisko lub przez ogniska przechodzących, jest stałą.* (Cięciwami sprzężonemi nazywa Terquem każde dwie cięciwy do średnic sprzężonych równoległe).

Na udowodnienie tego twierdzenia, przypomnijmy sobie najprzód, że jeżeli przez jakikolwiek punkt ellipsy lub hyperboli poprowadzimy do niéj styczną, a którekolwiek dwie średnie sprzężone weźmiemy za osi spółrzędnych; prostokąt mający za jeden bok rzędną punktu styczności, a za drugi bok rzędną stycznéj ze środka linii krzywéj wyprowadzoną, będzie równoważny kwadratowi z połowy téj średnicy, którąśmy wzięli za oś rzędnych. Wiadomo bowiem, że jeżeli z dwóch średnic sprzężonych, długość wziętéj za oś x oznaczymy przez $2a'$, a długość wziętéj za oś y ozna-

czymy przez $2b'$, równaniem ellipsy lub hyperboli jest $a'^2y^2 \pm b'^2 x^2 = \pm a'^2 b'^2$, a równaniem jéj stycznéj w punkcie $x'y'$, jest $a'^2y'y \pm b'^2x'x = \pm a'^2 b'^2$. (W obu tych równaniach, na przypadek ellipsy, służą znaki $+$; na przypadek hyperboli, trzeba brać po lewéj zawsze znak —, a po prawéj znak — lub $+$ stósownie do tego, jak oś x przecina krzywą lub nie). Już zaś widzimy, że gdy w napisaném dopiéro równaniu stycznéj założymy $x = o$, a odpowiadającą rzędną, czyli rzędną punktu gdzie się styczna przecina z osią y, nazwiemy y''; wypada $y'y'' = \pm b'^2$: co dowodzi własności, którąśmy przypomnieć chcieli. Jeżeli więc naprzykład w ellipsie (fig 6) poprowadzimy od upodobania cięciwę MN, a przez którykolwiek koniec M téj cięciwy nakreślimy do ellipsy styczną; i jeżeli ze środka C krzywéj, wyprowadzimy dwie linie proste: jednę do środka P cięciwy MN, przecinającą się z ellipsą w punkcie D a ze styczną w punkcie Q, drugą zaś równolegle do MN, przecinającą się z ellipsą w punkcie E, a ze styczną w punkcie T; będzie $MP.CT = \overline{CE}^2$, $CP.CQ = \overline{CD}^2$, gdyż CD, CE są połowami średnic sprzężonych ellipsy.



Uważmy powtóre, że gdy w ellipsie lub hyperboli, rzędna y' punktu styczności, przedłużona gdy tego potrzeba, przechodzi przez ognisko; natenczas rzędna

y'' stycznéj, ze środka krzywéj wyprowadzona, ma długość równą połowie téj z dwóch osi linii krzywéj, na któréj leżą ogniska, czyli połowie osi piérwszéj. Niech bowiem F, F' (fig. 6) będą ogniska ellipsy, CA połowa jéj osi wielkiéj, i niech cięciwa MN przechodzi przez ognisko F. Poprowadziwszy promień wodzący $F'M$, a na przedłużeniu drugiego promienia FM wziąwszy $MR=F'M$ i złączywszy $F'R$, wiadomo, że prostopadła spuszczona z punktu M do prostéj $F'R$, czyli linia prosta łącząca punkt M ze środkiem odległości $F'R$, jest do ellipsy w punkcie M styczną; a następnie linia prosta, łącząca środek C odległości $F'F$ ze środkiem odległości $F'R$ i na tych dwóch punktach zakończona, jako równoległa do FR i kończąca się na stycznéj, jest właśnie linią CT. Jest więc $CT=\frac{1}{2}FR=\frac{1}{2}(FM+F'M)=CA$; a podobnież okaże się rzecz dla hyperboli.

Według tych dwóch prawd, *każda cięciwa β ellipsy lub hyperboli, przez ognisko przechodząca, jest trzecią ciągło proporcyonalną do piérwszéj osi $2a$ téjże linii krzywéj i do jéj średnicy $2b'$ równoległéj względem owéj cięciwy*, czyli $\beta=\frac{2b'^2}{a}$. Jeżeli zatém przez to samo lub przez drugie ognisko ellipsy lub hyperboli, poprowadzimy cięciwę α sprzężoną względem β; będzie $\alpha=\frac{2a'^2}{a}$, gdzie $2a'$ oznacza średnicę sprzężoną względem $2b'$; a następnie $\alpha\pm\beta=\frac{2(a'^2\pm b'^2)}{a}$. Zważając teraz, że w ellipsie summa, a w hyperboli różnica kwadratów ze średnic sprzężonych jest stałą, w piérwszéj krzywéj równą summie, a w drugiéj równą ró-

żnicy kwadratów z dwóch osi; widzimy, że w ellipsie summa, a w hyperboli różnica cięciw α i β jest zawsze taż sama, jak kiedy jedna z tych dwóch cięciw jest osią piérwszą krzywéj, a druga do téjże osi prostopadłą: co b. d. d.

Niech ϑ oznacza kąt zawarty między średnicami sprzężonemi $2a'$ i $2b'$, a tém samém i kąt zawarty między cięciwami α i β; $2b$ zaś niech wyraża długość drugiéj osi ellipsy lub hyperboli. Równości $\alpha = \frac{2a'^2}{a}$ i $\beta = \frac{2b'^2}{a}$ dają $\alpha\beta \text{ wst}^2 \vartheta = 4 \frac{(a'b' \text{ wst } \vartheta)^2}{a}$; a że, jak wiadomo, $a'b' \text{ wst } \vartheta = ab$; zatém $\alpha\beta \text{ wst}^2 \vartheta = 4b^2$. Tak więc do twierdzenia Terquema można przydać następujące:

Twierdzenie 6. *W ellipsie i hyperboli, na którychkolwiek cięciwach sprzężonych, przez jednoż ognisko lub przez ogniska przechodzących, wystawimy równoległobok; zawsze prostokąt z dwóch wysokości tego równoległoboku będzie równoważny kwadratowi z drugiéj osi linii krzywéj.*

Niech w ellipsie lub hyperboli, ω oznacza kąt, który jakakolwiek średnica $2a'$, a tém samém i cięciwa do téjże równolegle średnicy przez którekolwiek ognisko poprowadzona, tworzy z piérwszą osią $2a$ krzywéj. Mamy, jak wiadomo $\pm \frac{1}{a'^2} = \frac{\text{dos}^2\ \omega}{a^2} \pm \frac{\text{wst}^2 \omega}{b^2}$. W téj równości, trzeba dla ellipsy brać znaki $+$; dla hyperboli zaś trzeba brać po prawéj zawsze znak $-$, a po lewéj znak $+$ lub $-$ według tego, jak $\text{sty}^2\ \omega <$ lub $> \frac{b^2}{a^2}$:

(uważamy tu bowiem $2a'$ za ilość zawsze rzeczywistą, czyli, że w danéj hyperboli $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, przez długość takiéj średnicy, która się nie przecina z tą krzywą, rozumiemy część téjże średnicy zakończoną na hyperboli $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$, z hyperbolą daną sprzężonéj). Mnożąc niniejszą równość przez $\frac{a}{2}$, i wstawiając potém za $\frac{a}{2a'^2}$ wartość powyżéj znalezioną $\frac{1}{\alpha}$, tudzież kładąc $\frac{b^2}{a}=p$, otrzymujemy *w ellipsie i hyperboli, pomiędzy długością $2a$ osi piérwszéj, parametrem $2p$ krzywéj, i cięciwą przez ognisko do piérwszéj osi pod kątem ω poprowadzoną, związek:*

$$\pm\frac{1}{\alpha}=\frac{\text{dos}^2\omega}{2a}\pm\frac{\text{wst}^2\omega}{2p}. \qquad (1)$$

Dla ellipsy służą znaki $+$; dla hyperboli zaś trzeba brać po prawéj zawsze znak $-$, a po lewéj znak $+$ lub $-$ według tego, jak końce cięciwy α przypadają, jeden na jednéj, drugi na drugiéj odnodze, lub téż oba na jednéjże odnodze hyperboli. Z czego widzimy, że pomiędzy cięciwami głównemi $2a$ i $2p$ a cięciwą α, zachodzi taki sam związek, jaki w punkcie na powiérzchni krzywéj zachodzi pomiędzy promieniami krzywości przecięć głównych, a promieniem krzywości przecięcia normalnego, tworzącego z jedném z tychże przecięć głównych kąt ω.

Można téż jeszcze te same prawdy wyprowadzić z równań biegunowych ellipsy i hyperboli. Jakoż, biorąc którekolwiek ognisko krzywéj za biegun, i

oznaczając przez ϱ promień wodzący, a przez ω kąt, który tenże promień tworzy z częścią pierwszéj osi linii krzywéj, prowadzącą od bieguna w stronę przeciwną względem wiérzchołka biegunowi najbliższego; równaniem ellipsy lub hyperboli jest $\varrho = \frac{p}{1 - e \operatorname{dos} \omega}$.

Głoska p oznacza jak przedtém, połowę parametru krzywéj, e zaś oznacza stosunek odległości bieguna od środka, do połowy a osi pierwszéj; i pamiętajmy, że co do hyperboli, wartości dodatne na ϱ należą do téj odnogi, w któréj leży ognisko wzięte za biegun, wartości zaś odjemne na ϱ należą do odnogi drugiéj. Zamieniając w przerzeczoném równaniu ω na $180^\circ + \omega$, i oznaczaiąc przez ϱ' wartość, którą wtedy przybiera ϱ, będzie $\varrho' = \frac{p}{1 + e \operatorname{dos} \omega}$. Dodawszy te dwa równania do siebie, i zważając, że bezwzględna wartość summy $\varrho + \varrho'$ wyraża cięciwę α krzywéj, przechodzącą przez biegun, a do pierwszéj osi pod kątem ω nachłonioną, otrzymujemy

$$\pm \alpha = \frac{2p}{1 - e^2 \operatorname{dos}^2 \omega} \qquad (2)$$

A ponieważ druga strona niniejszéj równości, po rozmnożeniu licznika i mianownika przez a^2, i po wstawieniu potém za ap, $a^2 e^2$ ich wartości b^2, $a^2 \mp b^2$, przechodzi na $\frac{2ab^2}{a^2 \operatorname{wst}^2 \omega + b^2 \operatorname{dos}^2 \omega} = \pm \frac{2a'^2}{a}$; jest przeto $\alpha = \frac{2a'^2}{a}$.

Dowiódłszy tego związku, wyprowadzimy już z niego twierdzenia 5 i 6, jak wyżéj. Podstawiając w (2)

za e^2 jego wartość $1 \mp \frac{p}{a}$, otrzymujemy $\pm\alpha = \frac{2ap}{a\,\mathrm{wst}^2\omega \pm p\,\mathrm{dos}^2\omega}$, równanie tož samo co (1). A jeżeli ztąd zechcemy wyprowadzić twierdzenie 5, bez opiérania się na własności $a'^2 \pm b'^2 = a^2 \pm b^2$; pomnóżmy mianownik i licznik drugiéj strony przez $\frac{1}{\mathrm{dos}^2\omega} = 1 + \mathrm{sty}^2\omega$, a otrzymamy $\pm\alpha = \frac{2ap(1+\mathrm{sty}^2\omega)}{a\,\mathrm{sty}^2\omega \pm p}$ (a). Dla cięciwy β, przez to samo lub przez drugie ognisko przechodzącéj, a sprzężonéj z cięciwą α, trzeba, podług wiadomego warunku na sprzężność, w miejscu styω położyć $\mp\frac{p}{a\,\mathrm{sty}\omega}$; z czego wypada $\pm\beta = \frac{2(a^2\mathrm{sty}^2\omega + p^2)}{a\,\mathrm{sty}^2\omega \pm p}$ (b). W obu tych równaniach (a) i (b), dla ellipsy należy po obu stronach brać znaki $+$; dla hyperboli zaś trzeba w mianowniku brać przed p zawsze znak $-$, a przed α i β znak $+$ lub $-$ stósownie do tego, jak $\mathrm{sty}^2\omega >$ lub $< \frac{p}{a}$. Dla ellipsy więc, z przyczyny że summa liczników w (a) i (b) jest równa $(2a+2p)(a\,\mathrm{sty}^2\omega + p)$, mamy

$$\alpha + \beta = 2a + 2p.$$

Dla hyperboli zaś, przyjmując $\mathrm{sty}^2\omega < \frac{p}{a}$, czyli rozumiejąc przez α tę z dwóch cięciw sprzężonych, któréj jeden koniec leży na jednéj, drugi na drugiéj odnodze linii krzywéj, i zważywszy że przewyżka licznika w (a) nad licznik w (b) jest równa $(2a-2p)(p-a\,\mathrm{sty}^2\omega)$, mamy

$$\alpha - \beta = 2a - 2p.$$

Co dowodzi twierdzenia 5.

Aby w powiérzchniach drugiego rzędu, dać przykład własności twierdzeniu piątemu podobnéj; oznaczmy przez $2a$, $2b$, $2c$ długości trzech osi ellipsoidy, a przez $2a'$, $2b'$, $2c'$ długości trzech którychkolwiek jéj średnic sprzężonych. Gdy przez oś największą $2a$ i przez każdą z trzech dopiéro wspomnionych średnic $2a'$, $2b'$, $2c'$ poprowadzimy płaszczyznę; te trzy płaszczyzny przetną ellipsoidę podług ellips, $2a$ za oś wielką mających. Jeżeli potém w tych trzech ellipsach, przez którekolwiek ognisko każdéj z nich, poprowadzimy trzy cięciwy α, β, γ, porządkiem do średnic $2a'$, $2b'$, $2c'$ równoległe; będzie, według powyższego, $\alpha = \frac{2a'^2}{a}$, $\beta = \frac{2b'^2}{a}$, $\gamma = \frac{2c'^2}{a}$, a tém samém $\alpha + \beta + \gamma = \frac{2}{a}(a'^2 + b'^2 + c'^2)$: a że, jak wiadomo, $a'^2 + b'^2 + c'^2 = a^2 + b^2 + c^2$; zatém $\alpha + \beta + \gamma = 2a + \frac{2b^2}{a} + \frac{2c^2}{a}$, co można tak wysłowić:

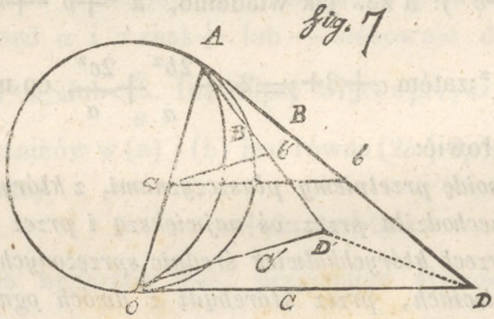
Gdy ellipsoidę przetniemy płaszczyznami, z którychby każda przechodziła przez oś największą i przez coraz inszą z trzech którychkolwiek średnic sprzężonych, a w tych przecięciach, przez którebądź z dwóch ognisk każdego, poprowadzimy cięciwy do owych trzech średnic sprzężonych równoległe; summa tak poprowadzonych trzech cięciw będzie zawsze równa summie z największéj osi i z parametrów największego i średniego przecięcia głównego ellipsoidy.

V.

O rzucie stereograficznym.

Gdy chcąc zrobić kartę gieograficzną podług prawideł perspektywy, stawiamy oko w jakimkolwiek punkcie na powiérzchni kuli ziemskiéj, a płaszczyznę rysunku bierzemy prostopadłą do średnicy przez tenże punkt przechodzącéj; mówi się wtedy, że robimy rys czyli rzut stereograficzny. Główne własności rysu stereograficznego zawiérają się w dwóch następujących podaniach.

Twierdz. 7. *Jeżeli przez dwie linie proste* AB, AB′ (fig. 7) *w jednymże punkcie* A *do kuli styczne, poprowadzimy dwie płaszczyzny, z którychby każda przechodziła przez drugi punkt* O *gdziekolwiek na téj saméj kuli wzięty; przecięcia* ab, ab′ *tych dwóch płaszczyzn przez każdą płaszczyznę równoległą do płaszczyzny w tym drugim punkcie* O *z kulą stycznéj, uczynią z sobą taki sam kąt co i przerzeczone dwie styczne.*



Płaszczyzna bowiem *BAB′* jest do kuli w punkcie *A* styczną. Jeżeli zatém spólne płaszczyzn *OAB* i *OAB′* przecięcie, linia prosta *OA*, przechodzi przez środek kuli; natenczas obie płaszczyzny *BAB′* i *bab′* są do téjże linii *OA* prostopadłe; a dlatego kąt *bab′* jest równy kątowi *BAB′*. Powiadam, że przerzeczone dopiéro

dwa kąty są i wtedy sobie równe, gdy linia prosta OA nie przechodzi przez środek kuli. Jakoż płaszczyzny OAB i OAB' przecinają kulę w dwóch kołach, do których linie AB i AB' są styczne w punkcie A; a te same dwie płaszczyzny, z płaszczyzną do kuli w punkcie O styczną, przecinają się w dwóch liniach prostych OC, OC', które są także do przerzeczonych dwóch kół w punkcie O styczne. Ponieważ zakładamy, że linia OA nie jest średnicą kuli; oczywiście linia AB przetnie się z linią OC, a linia AB' z linią OC': niech punkta tych przecięć będą D, D', i poprowadźmy linią prostą DD'. Trójkąty ADD' i ODD' mają bok DD' spólny, bok $AD=OD$ jako styczne jednegoż koła, z jednéj strony na punkcie ich przecięcia się z sobą a z drugiéj na punktach styczności zakończone, i dla téj saméj przyczyny bok $AD'=OD'$; te więc dwa trójkąty są równe, a w szczególności kąt $DAD'=DOD'$. Lecz kąty bab' i DOD' są równe, bo ich ramiona ab i OD, ab' i OD', jako przecięcia płaszczyzn OAB, OAB' płaszczyznami bab' i DOD' od siebie z założenia równoległemi, są równoległe; więc i kąt bab' jest równy kątowi DAD'. Co b. d. d.

WNJOSEK. *Gdy dwie powiérzchnie ostrokręgowe mają punkt jakikolwiek* O *na kuli za spólny wiérzchołek* (czyli za spólny środek), *a dwie jakiekolwiek linie krzywe na téjże kuli nakreślone i przecinające się z sobą za podstawy* (czyli za kierownice); *przecięcia tych dwóch powiérzchni ostrokręgowych przez każdą płaszczyznę równoległą do płaszczyzny w spólnym wiérzchołku tychże powiérzchni z kulą stycznéj, przecinają się z sobą pod takim samym kątem, co i sameż podstawy*: biorąc punkta przecięć odpowiedne sobie, tojest z wiérzchołkiem O na jednéj linii prostéj leżące. Jeżeli podstawy po-

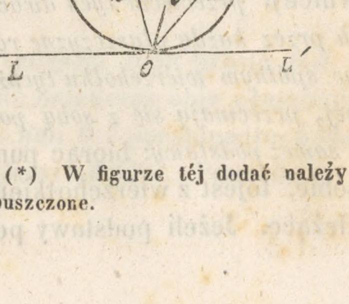
wiérzchni ostrokręgowych stykają się z sobą; to i przecięcia tych powiérzchni przez wspomnioną płaszczyznę, będą także do siebie styczne.

Podany dopiéro wniosek wyraża się inaczéj i krócéj tak: *Pod jakim kątem przecinają się z sobą dwie linie krzywe na kuli nakreślone, pod takim samym kątem przetną się z sobą i rzuty stereograficzne tych dwóch linij krzywych.*

TWIERDZENIE 8. *Jeżeli punkt jakikolwiek* O (fig. 8) (*) *na kuli weźmiemy za wiérzchołek, a koło* K *na téjże kuli nakreślone za podstawę ostrokręgu:* 1°, *Przecięcie* k *tego ostrokręgu, przez każdą płaszczyznę* p *równoległą do płaszczyzny w jego wiérzchołku z kulą stycznéj, będzie także kołem;* 2°, *Środek tego drugiego koła będzie się znajdował na linii prostéj, łączącéj wiérzchołek* O *rzeczonego ostrokręgu z wiérzchołkiem* T *drugiéj powiérzchni ostrokręgowéj, któréjby wszystkie tworzące były na okręgu podstawy piérwszego ostrokręgu do kuli styczne.*

DOWODZENIE.

fig. 8.



Przez linią prostą *OT*, poprowadźmy od upodobania płaszczyznę. Ta płaszczyzna przetnie: kulę, w kole *ONN′*; spólną podstawę *K*, obu ostrokręgów, w cięciwie *NN′*; powiérzchnią boczną piérwszego ostrokręgu, w liniach prostych *ON* i *ON′*; po-

(*) W figurze téj dodać należy linie *TN* i *TN′* przez omyłkę opuszczone. P. R.

wierzchnią boczną drugiego, w liniach prostych *TN* i *TN'*, które są do okręgu koła *ONN'* w punktach *N* i *N'* styczne. Ta sama płaszczyzna, z płaszczyzną do kuli w punkcie *O* styczną, przetnie się w linii prostéj *LL'*, do koła *ONN'* w tymże punkcie *O* stycznéj; a z płaszczyzną *p*, do przerzeczonéj płaszczyzny stycznéj równoległą, przetnie się w linii prostéj do *LL'* równoległéj, przecinającéj linie *ON*, *ON'*, *OT* w punktach *n*, *n'*, *t*, w których też linie *ON*, *ON'*, *OT* spotykają płaszczyznę *p*. Przez punkt *T* poprowadźmy do linii *LL'* równoległą, którą przedłużmy aż do przecięcia się z przeciągnioną *ON* w punkcie *M*. Kąty *TMN* i *LON*, jako naprzemianległe wewnętrzne względem linij równoległych *MT*, *LL'* i siecznéj *MO*, są równe; a że kąt $MNT = LON$, bo każdy z tych dwóch kątów ma za miarę połowę łuku *NRO*; w trójkącie zatém *MNT* kąty przy *M* i *N* są równe sobie, a dlatego i bok $TM = TN$. Lecz w trójkątach *OTM* i *Otn*, jako mających kąt przy *O* spólny i boki *TM*, *tn* do linii *LL'* a tém samém i względem siebie równoległe, $OT : Ot = TM : tn$; zatém $OT : Ot = TN : tn$. Ponieważ zaś, z wykręcaniem się płaszczyzny przechodzącéj przez linią *OT*, linia *TN*, jako bok ostrokręgu prostego, nie zmienia swojéj długości, a punkta *O*, *T* i *t* są zawsze te same; czwarty przeto wyraz powyższéj proporcyi, linia *tn*, ma na wszystkich płaszczyznach przez *OT* przechodzących, jednę i tęż samę długość; a więc przecięcie *k* piérwszego ostrokręgu przez płaszczyznę *p*, jest kołem, mającém punkt *t* za środek.

Gdy koło *K* jest kołem wielkiém kuli, natenczas powiérzchnia ostrokręgowa opisana na kuli wzdłuż okręgu koła dopiéro przerzeczonego, ma wszystkie swoje tworzące prostopadłe do płaszczyzny tegoż ko-

ła, a zatém staje się powiérzchnią walcową. Jeżeli wszakże przez *OT* rozumieć będziemy teraz linią, z punktu *O* równolegle do wspomnionych tworzących, czyli prostopadle do płaszczyzny koła *K* poprowadzoną; założone twierdzenie będzie jeszcze prawdziwém. Jakoż kąt $Ont = nOL = MNT$; a że teraz dla równoległości linij *NT* i *OT* od siebie, kąt $MNT = nOt$; jest przeto kąt $Ont = nOt$, a dlatego $tn = tO$, na wszystkich płaszczyznach przechodzących przez linią *OT*. Przecięcie więc *k* jest i teraz kołem, mającém środek w punkcie *t*. Co b. d. d.

Wyłożony dopiéro dowód, w przypadku gdy koło *K* jest kołem małém kuli, wychodzi w gruncie na to: że się dowodzi, iż przecinając ostrokrąg piérwszy $NN'O$ płaszczyzną przechodzącą przez punkt *T*, a równoległą do płaszczyzny stycznéj z kulą w punkcie *O*, otrzymujemy na przecięcie koło, mające środek w punkcie *T*; z czego już wypada, że i wszystkie przecięcia do tamtego równoległe, są także kołami, mającemi środki na linii *OT*. Gdybyśmy wreszcie chcieli udowodnić samę tylko część piérwszą niniejszego twierdzenia, dosyć byłoby, jak wiadomo, uważać: że płaszczyzna poprowadzona przez oś ostrokręgu piérwszego, prostopadle do jego podstawy, jest oraz prostopadłą do płaszczyzny *p*; i że na tak poprowadzonéj płaszczyźnie, (w ogólności na każdéj płaszczyźnie przechodzącéj przez wiérzchołek wspomnionego ostrokręgu a tenże ostrokrąg przecinającéj), kąt $NN'O = NOL = Onn'$.

Punkta n, n', t, w których się płaszczyzna *p* rysunku przecina z liniami prostemi, od punktów N, N', T do oka *O* prowadzącemi, sąto właśnie rzuty stereo-

graficzne punktów N, N', T; a twierdzenie wyraża się inaczéj w ten sposób: 1° *Rzut stereograficzny każdego koła na kuli, przez oko nie przechodzącego, jest także kołem;* 2° *Środkiem tego drugiego koła jest rzut stereograficzny wiérzchołka ostrokręgu opisanego na kuli wzdłuż okręgu koła piérwszego.*

Tak wysłowioną część drugą twierdzenia 8 nazywa Chasles trzecią własnością rzutu stereograficznego, i dowodzi jéj za pomocą trygonometryi (*Journal de Mathématiques, publié par Liouville*, poszyt z miesiąca lipca 1842 r. str. 172); a że p. Chasles szło właśnie o podanie dowodzenia jak najbardziéj elementarnego, sądzę więc, że dowód który się tu podało, jest stósowniéjszy.